Copie 1

15,5

DS Méca 2

1°) Nombre d'inconnues

Actions mécaniques | en O : 5
| en A : 5

Cinématique : α, β. $\Rightarrow$ 12 inconnues.

Nombre d'équations :

Cm ? $\alpha = f(t)$?

1,5

2 solides ; 6 équations/solide (problème spatial)

$\hookrightarrow$ 12 équations

Donc le problème est isostatique : la combinaison linéaire des 12 équations permettra de remonter à toutes les inconnues.

2°) $\vec{V_G} = \vec{V_A} + \vec{GA} \wedge \vec{\Omega_{2/R_0}}$

avec $\vec{V_A} = \vec{V_O} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega_{1/R_0}}$ avec $\vec{V_O} = \vec{0}$

$\hookrightarrow \vec{V_G} = \vec{AO} \wedge \vec{\Omega_{1/R_0}} + \vec{GA} \wedge \vec{\Omega_{2/R_0}}$

$$= \begin{vmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b\sin\beta \\ 0 \\ -b\cos\beta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}$$

$$\vec{V_G} = \begin{vmatrix} 0 \\ a\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b\dot{\beta}\cos\beta \\ b\dot{\alpha}\sin\beta \\ -b\dot{\beta}\sin\beta \end{vmatrix}$$

2

Soit $\vec{V}_G = \begin{vmatrix} b\dot\beta \cos\beta \\ a\dot\alpha + b\dot\alpha \sin\beta \\ -b\dot\beta \sin\beta \end{vmatrix}$

$\vec{\gamma}_G$?

3°) $T_1 = T_1^* = \underline{\frac{1}{2} I_{Ozc} \dot\alpha^2}$ car $V(O) = 0$ avec O centre d'inertie

$$T_2 = \frac{1}{2} m \vec{V(G)}^2 + T^*$$

avec $T^* = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{2/R_0} [I]_G \vec{\omega}_{2/R_0}$

Soit $T_2 = \frac{1}{2} m \left(b^2 \dot\beta^2 \cos^2\beta + b^2 \dot\beta^2 \sin^2\beta + \dot\alpha^2 (a + b\sin\beta)^2 \right)$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot\beta \\ \dot\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot\beta \\ \dot\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} m \left(b^2 \dot\beta^2 + \dot\alpha^2 (a^2 + 2ab\sin\beta + b^2 \sin^2\beta) \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot\beta \\ \dot\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot\beta mR^2/2 \\ \dot\alpha mR^2/4 \end{pmatrix}$$

2

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left(b^2 \dot\beta^2 + a^2 \dot\alpha^2 + b^2 \dot\alpha^2 \sin^2\beta + 2ab\dot\alpha^2 \sin\beta \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\dot\beta^2 \frac{mR^2}{2} + \dot\alpha^2 \frac{mR^2}{4} \right)$$

D'où $T_\Sigma = \frac{1}{2} m \left(b^2 \dot\beta^2 + a^2 \dot\alpha^2 + b^2 \dot\alpha^2 \sin^2\beta + 2ab\dot\alpha^2 \sin\beta \right)$

$$+ \frac{mR^2}{8} \left(2\dot\beta^2 + \dot\alpha^2 \right) + \frac{I_{Ozc}}{2} \dot\alpha^2$$

calcul de U dans 4°) ...

V

4°) $\alpha = f(t)$ Soit $\alpha - f(t) = 0$

Relation non holonome.

on écrit $\boxed{g(\alpha, t) = \alpha - f(t)}$ (λ)

avec $g(\alpha, t) = 0$.

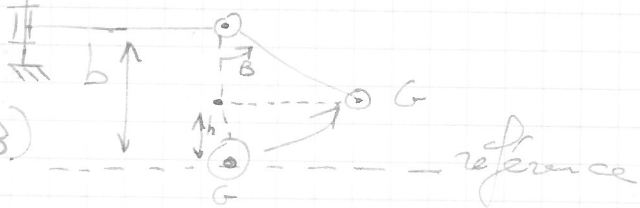
On n'a aucune autre relation associée ni à α ni à β.

Je calcule la fonction de forces U

Seul le poids sur 2 travaille !

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

$$= C_1^{te} + mg\,(b - b\cos\beta) + C_2^{te}$$



$$E_p = mgb\,(1-\cos\beta) + C^{te}$$

Soit $\boxed{U = -mgb\,(1-\cos\beta) + C^{te}}$

Alors : $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_i} = \mathcal{L}(q_i)$$

On calcule $\mathcal{L}(\alpha)$

- $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = I\dot{\alpha} + \dfrac{m}{2}\left(2a^2\dot{\alpha} + 2b^2\sin^2\beta\,\dot{\alpha} + 4ab\sin\beta\,\dot{\alpha}\right) + \dfrac{mR^2}{4}\dot{\alpha}$

Soit $\partial T / \partial \dot{\alpha} = I\dot{\alpha} + ma^2\dot{\alpha} + mb^2\sin^2\beta\,\dot{\alpha} + 2mab\sin\beta\,\dot{\alpha} + \dfrac{mR^2}{4}\dot{\alpha}$

- $\partial T / \partial \alpha = 0$ (α n'apparaît pas de façon explicite.)

- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot\alpha}\right) = \left(I + ma^2 + b^2_m \sin^2\beta + 2ab_m \sin\beta + \dfrac{mR^2}{4}\right)\ddot\alpha$

et non $\dfrac{\partial}{\partial t}$! $\rightarrow$ $\beta(t)$!

- $\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} = 0$

- $\dfrac{\partial g}{\partial \alpha} = 1$

1

D'où $\mathcal{L}(\alpha) \longrightarrow \ddot\alpha\left(I + ma^2 + b^2_m \sin^2\beta + 2ab_m \sin\beta + \dfrac{mR^2}{4}\right) =$

c'est $K_{1/Z_{1,c}} = C_m$

Q1

↳ représente le couple moteur sur $\vec{Z}_{1c}$

$K = \ddot\alpha \times$ inertie équivalente à l'ensemble $(1, 2)$, qui varie selon l'angle β.

On calcule $\mathcal{L}(\beta)$

$\dfrac{\partial T_\Sigma}{\partial \dot\beta} = \dfrac{m}{2}\left(2b^2\dot\beta\right) + \dfrac{mR^2}{8}\left(4\dot\beta\right) = \dot\beta\left(b^2 m + \dfrac{mR^2}{2}\right)$

↳ $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot\beta}\right) = \ddot\beta\left(b^2 m + \dfrac{mR^2}{2}\right)$

$\dfrac{\partial T}{\partial \beta} = \dfrac{m}{\cancel{2}}\left(b^2\dot\alpha^2 \times \cancel{2}\cos\beta\sin\beta + \cancel{2}ab\dot\alpha^2\cos\beta\right)$

$$\partial U / \partial \beta = \frac{\partial (mgb\cos\beta)}{\partial \beta} = -mgb\sin\beta.$$

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} = 0$$

1

Donc

$$\mathcal{L}(\beta) \longrightarrow \ddot{\beta}\left(b^2 m + \frac{mR^2}{2}\right) - \frac{m}{2}\dot{\alpha}^2 b\cos\beta\,(b\sin\beta + a) = -mgb\sin\beta$$

C'est équivalent à $\vec{K}_{2/y_{G,2}} = \Sigma \mathcal{M}(G)_{ext}$ **NON**

~~en effet~~ $$\underbrace{\ddot{\beta} m\left(b^2 + \frac{R^2}{2}\right) - \dot{\alpha}^2\frac{m}{2} b\cos\beta\,(b\sin\beta + a)}_{\text{homogène à une accélération multipliée par 1 moment d'inertie}} = \underbrace{-mgb\sin\beta}_{\text{Couple en } -\vec{y} \text{ exercé par le poids avec } b\sin\beta \text{ son bras de levier.}}$$

5°) $\vec{\sigma}_{\Sigma/0} = \vec{\sigma}_{1/0} + \vec{\sigma}_{2/0}$

$$= \vec{\sigma}^*(O) + \vec{OG} \wedge m\vec{V}_G + \vec{\sigma}^*(G)$$

car $\vec{V}(O) = \vec{0}$

$$= \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} a + b\sin\beta \\ 0 \\ b\cos\beta \end{vmatrix} \wedge m \begin{vmatrix} b\dot{\beta}\cos\beta \\ a\dot{\alpha} + b\dot{\alpha}\sin\beta \\ -b\dot{\beta}\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} mR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ I\dot{\alpha} \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} -ab\dot{\alpha}\cos\beta - b^2\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta \\ ab\dot{\beta}\sin\beta + b^2\dot{\beta}\sin^2\beta + b^2\dot{\beta}\cos^2\beta \\ a^2\dot{\alpha} + ab\dot{\alpha}\sin\beta + ab\dot{\alpha}\sin\beta + b^2\dot{\alpha}\sin^2\beta. \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\beta} mR^2/2 \\ \dot{\alpha} mR^2/4 \end{vmatrix}$$

Soit $\vec{\sigma}_{\Sigma/0} = \begin{vmatrix} -m\,ab\dot{\alpha}\cos\beta - mb^2\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta \\ \dot{\beta}mR^2/2 + mab\dot{\beta}\sin\beta + mb^2\dot{\beta} \\ I\dot{\alpha} + \dot{\alpha}mR^2/4 + ma^2\dot{\alpha} + 2mab\dot{\alpha}\sin\beta + mb^2\dot{\alpha}\sin^2\beta \end{vmatrix}$

2

homogène.

$$\vec{K}(O) = \frac{d\vec{\sigma}_{\Sigma/0}}{dt} + \vec{V}(O)\wedge M\vec{V_G}$$

avec $\vec{V}(O) = \vec{0}$.

$$\vec{K}(O) = \frac{d\vec{\sigma}_{\Sigma/0}}{dt}$$

$$\vec{K}(O) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{\Sigma/0}}{dt}\right|_{R_c} + \vec{\omega}_{R_c/R_0}\wedge\vec{\sigma}_{\Sigma/0}$$

$$\vec{K}(O)\cdot\vec{z_c} = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{\Sigma/0}}{dt}\right|_{R_c}\cdot\vec{z_c} + \left(\vec{\omega}_{R_c/R_0}\wedge\vec{\sigma}_{\Sigma/0}\right)\cdot\vec{z_c}$$

$$\vec{K}(O)\cdot\vec{z_c} = \left.\frac{d(\vec{\sigma}_{\Sigma/0}\cdot\vec{z_c})}{dt}\right|_{R_c} + \left(\vec{\omega}_{R_c/R_0}\wedge\vec{\sigma}_{\Sigma/0}\right)\cdot\vec{z_c}$$

?

Bien alors?

$$= I\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}\frac{mR^2}{4} + \ddot{\alpha}ma^2 + \ddot{\alpha}(2mab\sin\beta) + mb^2\sin^2\beta\,\ddot{\alpha}$$

$$\vec{K}(O)\cdot\vec{z_c} = \ddot{\alpha}\left(I + ma^2 + b^2m\sin^2\beta + 2abm\sin\beta + mR^2/4\right)$$

7°) Sur $\vec{z_c}$, on a 1 seul moment, qui est $\vec{C_m} = C_m\vec{z_c}$

On a donc : $\ddot{\alpha}\left(I + ma^2 + b^2m\sin^2\beta + 2abm\sin\beta + mR^2/4\right) = C_m$.

Ceci donne le couple nécessaire pour un mouvement donné.
On retrouve $\mathcal{L}(\alpha)$.

Résultante des AM en O.

on a $\vec{H}_\Sigma = \vec{0}$ car $\vec{\gamma}_0 = \dfrac{d\vec{V}(0)}{dt} = \vec{0}$.

Donc $\vec{0} = \underbrace{\begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix}}_{} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix}$

poids.

Résultante du torseur d'action mécanique

les 3 translations sont bloquées

On a $\vec{H}_\Sigma = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$

$= \vec{0} + m\dfrac{d\vec{V}_G}{dt}$.

car $\vec{\gamma}_0 = \dfrac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{0}$.

$= m\left(\dfrac{d\vec{V}_G}{dt}\Big|_{R_c} + \vec{\omega}_{R_c/R_1} \wedge \vec{V}_G\right) = m\dfrac{d\vec{V}_G}{dt}\Big|_{R_c} + m\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} b\dot{\beta}\cos\beta \\ \dot{\alpha}(a+b\sin\beta) \\ -b\dot{\beta}\sin\beta \end{vmatrix}$

1

$\vec{H}_\Sigma = m\left[\begin{vmatrix} b\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}\sin\beta - \dot{\alpha}^2(a+b\sin\beta) \\ a\ddot{\alpha} + b\ddot{\alpha}\sin\beta + b\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta + b\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta \\ -b\ddot{\beta}\sin\beta - b\dot{\beta}^2\sin\beta \end{vmatrix}\right.$

On a 2 forces extérieures

$\vec{F}_0 = \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -(m+M)g \\ 0 \end{vmatrix}$?

Résultante du torseur d'1 pivot

Dm + $\vec{\xi}$

9r

le PFD donne $\begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ (m+M)g \\ 0 \end{vmatrix} + \vec{H}_\Sigma$

$$\vec{F_0} = \begin{vmatrix} mb\ddot{\beta}\cos\beta - b\dot{\beta}\sin\beta\, m - m\dot{\alpha}^2(a+b\sin\beta) \\ m\ddot{\alpha}(a+b\sin\beta) + 2b\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta \quad + (m+M)g \\ -b\sin\beta\,(\ddot{\beta}+\dot{\beta}^2)\,m \end{vmatrix}$$

résultante en O

8°) $\mathcal{L}(\beta) \rightarrow m\ddot{\beta}\left(b^2+\frac{R^2}{2}\right) - \dot{\alpha}^2\frac{b}{2}\cos\beta(b\sin\beta+a)m = \underbrace{-mgb\sin\beta}$

L'énergie potentielle de (S_2) est $mgb(1-\cos\beta) + C^{te}$.

Donc $\boxed{E_p(S_2) = \left[m\ddot{\beta}\left(b^2+\frac{R^2}{2}\right) - \dot{\alpha}^2\frac{b}{2}\cos\beta(b\sin\beta+a)m\right]\frac{(\cos\beta-1)}{\sin\beta}}$

C'est un scalaire !

Cette énergie est exprimée dans le repère de calcul (non galliléen)

Mais si $\dot{\alpha} = C^{te}$, G ne subit pas d'accélération verticale

car $\vec{H_\Sigma}(\dot{\alpha} = C^{te}) \cdot \vec{y_c} = 0$

?

Donc cela revient à dire que R_c est alors galliléen sur y

On veut l'ép. relatif ! (sur β)

Il faut donc chercher à résoudre $\begin{cases} \frac{dE_p(S_2)}{d\beta} = 0 \\ \frac{dE_p(S_2)}{d\alpha} = 0 \end{cases}$

Mais, en toute logique, cette position ne dépend pas de α (équilibre par rapport à 1, donc $\forall\alpha$)

$\Longrightarrow$ on résoudrait $\boxed{\frac{dE_p(S_2)}{d\beta} = 0}$

8°) On isole le bras (S_1)

On a une percussion en O : $\vec{P}_{0/1} = \begin{vmatrix} P_{OX} \\ P_{OY} \\ P_{OZ} \end{vmatrix}$

et en A $\vec{P}_{A/1} = \begin{vmatrix} P_{AX} \\ P_{AY} \\ P_{AZ} \end{vmatrix}$ car les 3 translations sont bloquées.

$$\Delta_{\vec{p}} = M(\vec{V_0^1} - \vec{V_0^0}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} P_{OX} + P_{AX} = 0 \\ P_{OY} + P_{AY} = 0 \\ P_{OZ} + P_{AZ} = 0 \end{cases}} \quad (I)$$

$$\Delta\vec{\sigma}_{/O} = I(\omega^1 - \omega^0)\vec{Z_C} = \vec{OO} \wedge \vec{P_O} + \vec{OA} \wedge \vec{P_A}$$

$$= \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} P_{AX} \\ P_{AY} \\ P_{AZ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -a P_{AZ} \\ a P_{AY} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{a P_{AY} = I(\omega^1 - \omega^0)}$$

∃ aussi un moment de percussion M_{OY}

On isole la cabine S_2

$$\Delta_{\vec{p}} = m(\vec{V_G^1} - \vec{V_G^0})$$

car Arrêt urgence ↳ V_G^1

$$= m\begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}(a+b\sin\beta) \\ 0 \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} b\dot{\beta}^0\cos\beta \\ \dot{\alpha}(a+b\sin\beta) \\ -b\dot{\beta}^0\sin\beta \end{vmatrix}$$

car   car $\dot{\beta} = 0$

or $\Delta_{\vec{p}} = -\vec{P}_{A/1} \Rightarrow \begin{cases} -P_{AX} = +mb\cos\beta\,\dot{\beta}^0 \\ P_{AY} = m\dot{\alpha}^1(a+b\sin\beta) - m\dot{\alpha}^0(a+b\sin\beta) \\ P_{AZ} = -mb\sin\beta\,\dot{\beta}^0 \end{cases}$ (II)

Soit $P_{Ax} = 0$

les systèmes (I) et (II) donnent

$$P_{Ox} = -mb\cos\beta\ \dot{\beta}^{0}$$
$$P_{Oy} = 0$$
$$P_{Oz} = mb\sin\beta\ \dot{\beta}^{0}$$

2

Soit $\boxed{\mathcal{P}_{0/1} = mb\dot{\beta}^{0} \begin{vmatrix} -\cos\beta \\ 0 \\ \sin\beta \end{vmatrix}}$

percussions en O

$$\Delta T = T^{1} - T^{0}$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\vec{V}_G^{1\,2} - \vec{V}_G^{0\,2}\right)$$

car $\vec{V}_O^{1} = \vec{V}_O^{0} = \vec{0}$

$$= \frac{1}{2}m\left(0 - \left[(b\dot{\beta}^{0}\cos\beta)^2 + (-b\dot{\beta}\sin\beta)^2\right]\right)$$

différences sur x et z

$$\boxed{\Delta T = -\frac{1}{2}m\,b^2\dot{\beta}^{0\,2}} < 0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\beta}^{0\,2}$$

perte d'énergie cinétique

QT

$= 0$ (et $\dot{\alpha}^{1} = \dot{\alpha}^{0}$)

Consignes relatives au devoir: Durée : 2H30

Documents Autorisés : ☐ Oui ☑ Non Si oui, type de document :

Consignes spécifiques : Calculatrice inutile donc interdite

Etude dynamique d'une centrifugeuse humaine

Les performances des avions de combat modernes permettent d'atteindre des niveaux d'accélération très élevés, qui peuvent conduire à la perte de conscience des pilotes. Les centrifugeuses humaines sont utilisées pour l'entraînement de ces derniers, afin d'augmenter leur tolérance aux fortes accélérations via des exercices de contraction musculaire et de respiration. Par ailleurs, ces machines contribuent aussi à la recherche médicale « terrestre ». On peut ainsi faire varier le niveau de gravité apparent sur un patient et en étudier les effets pour des études physiologiques fines (système cardiovasculaire, fonctions d'équilibre, etc.).

Le but de cet exercice est précisément d'étudier une centrifugeuse humaine (Σ), composée de deux solides (S_1) et (S_2) :

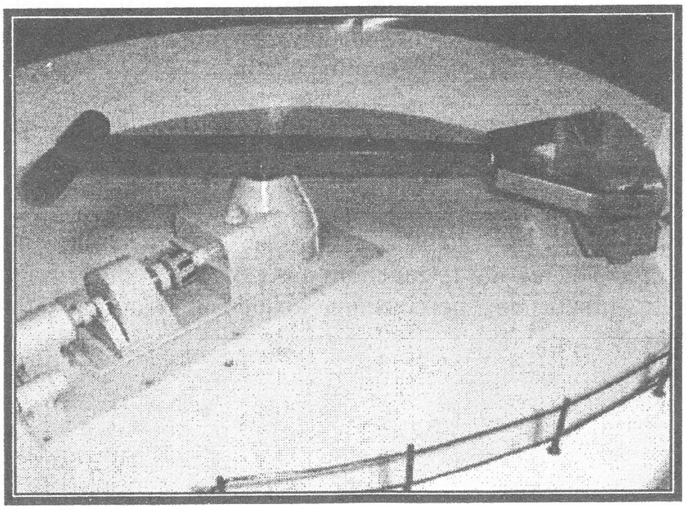
- (S_1) est le bras principal de la machine, de masse M, centre de gravité O et moment d'inertie I par rapport à son seul axe de rotation (Oz_c).
- (S_2) est la cabine du pilote, de forme cylindrique, masse m, rayon R, centre de gravité G et tenseur d'inertie $[I]_G$ dans le repère $R_c = (O, x_c, y_c, z_c)$ que l'on choisira comme repère de calcul [ce repère de calcul est lié à (S_1)] :

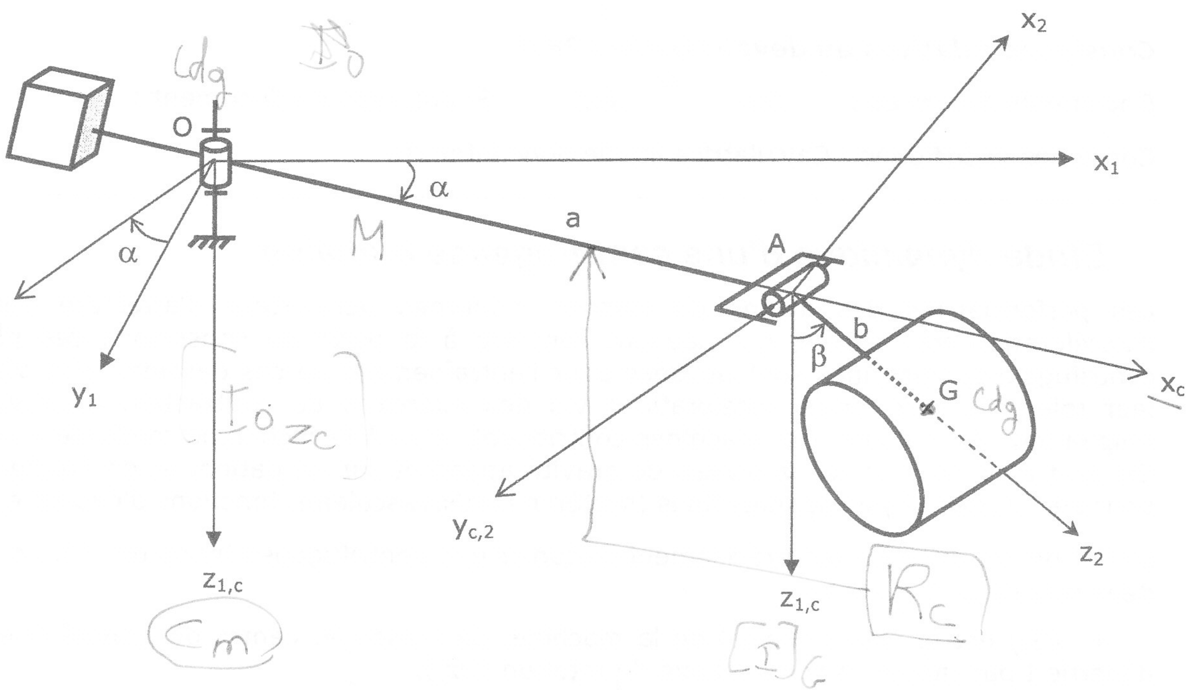
$$[I]_G = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}.$$

Le mouvement de (S_1) par rapport au sol est paramétré par l'angle α et le mouvement relatif de (S_2) par rapport à (S_1) est paramétré par l'angle β.

La machine est entraînée en rotation par un moteur électrique délivrant sur (S_1) un couple C_m porté par l'axe (Oz_c). On suppose ici que les solides (S_1) et (S_2) sont liés via une liaison de type pivot d'axe (Ay_c), sans autres actions mécaniques. On note $\overline{OA} = a$ et $\overline{AG} = b$.

L'objectif de ce problème est de dimensionner la motorisation C_m de cette centrifugeuse et déterminer les actions de liaison au niveau du pivot en O (porté par l'axe (Oz_c)), en fonctionnement « normal » d'une part et en cas d'arrêt d'urgence de la machine d'autre part.





ok 1) Analyser ce problème de dynamique. Est-il isostatique ? Qu'en déduit-on ?

ok 2) Déterminer les vitesse et accélération absolues de G.

ok 3) Déterminer l'énergie cinétique T_Σ et la fonction de forces U = -Ep du système (Σ). Généreusement, le correcteur indique la forme que doit prendre cette énergie cinétique :

$$T_\Sigma = \frac{I}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{m}{2}\left(b^2\dot{\beta}^2 + a^2\dot{\alpha}^2 + b^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta + 2ab\dot{\alpha}^2\sin\beta\right) + \frac{mR^2}{8}\left(2\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\right).$$

4) On suppose que le moteur précité impose un mouvement angulaire de (S_1) sous la forme $\alpha = f(t)$. Ecrire les deux équations de Lagrange associées aux paramètres cinématiques du problème et donner la signification mécanique de ces équations (i.e. l'équivalent via les théorèmes généraux).

ok 5) Déterminer le moment cinétique de (Σ) en O.

$\frac{I}{2} \times 2$ ok 6) Déterminer la composante du moment dynamique de (Σ) sur la direction (Oz_c). On se limitera à cette direction, les calculs étant relativement laborieux... C'est pour cette raison que la méthode analytique est préférable à la méthode Newtonienne pour un tel mécanisme.

~ 7) Déterminer la résultante des actions mécaniques de liaison appliquées sur (Σ) en O ainsi que le couple C_m que délivrera le moteur pour un mouvement donné. Vérifier que ce couple est conforme aux équations de Lagrange précédemment écrites.

8) Grâce à l'équation de Lagrange sur le paramètre β, écrire une relation permettant de déterminer la position d'équilibre relatif β_{eq} de (S_2) par rapport à (S_1) lorsque $\dot{\alpha} = \omega = cte$ (on ne demande pas cette valeur de β_{eq}).

9) En cas d'arrêt d'urgence de la machine sur son mouvement relatif de rotation en β uniquement, déterminer le torseur des percussions de liaison générées en O ainsi que la perte d'énergie cinétique associée.

mv.

$$\vec{x} \wedge \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ -1 \\ \end{pmatrix}$$

Rappels :

- Loi de distribution des vitesses dans un solide :

$$\overrightarrow{V(P)} = \overrightarrow{V(Q)} + \overrightarrow{\omega_{S/R_1}} \wedge \overrightarrow{QP}, \qquad \text{P et Q} \in (S)$$

- Loi de dérivation d'un vecteur projeté dans une base mobile :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_e} + \overrightarrow{\omega_{R_e/R_1}} \wedge \vec{A}$$

- Théorèmes de Kœnig (valables $\forall$ O) :

$$\overrightarrow{\sigma(O)} = \overrightarrow{OG} \wedge m.\overrightarrow{V(G)} + \overrightarrow{\sigma^*(G)}$$

$$\overrightarrow{K(O)} = \overrightarrow{OG} \wedge m.\overrightarrow{\gamma(G)} + \overrightarrow{K^*(G)}$$

$$T = \frac{1}{2}m.V^2(G) + T^*$$

- Relation entre moments dynamique et cinétique :

$$\overrightarrow{K(O)} = \frac{d\overrightarrow{\sigma(O)}}{dt} + \overrightarrow{V(O)} \wedge M.\overrightarrow{V(G)}, \quad \text{valable } \forall O$$

- Equations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial q_i} + \mu a_i + \nu b_i$$

- Théorèmes généraux en O au cours d'un choc :

$$\Delta\vec{p} = \sum_{P_i} \overrightarrow{\mathcal{P}_{P_i}^{ext}}(t_0)$$

$$\Delta\overrightarrow{\sigma_{/O}} = \sum_{P_i} \overrightarrow{OP_i} \wedge \overrightarrow{\mathcal{P}_{P_i}^{ext}}(t_0)$$

- Equation de restitution :

$$\left[\overrightarrow{V^1(P)} - \overrightarrow{V^1(Q)}\right].\vec{n} = -e.\left[\overrightarrow{V^0(P)} - \overrightarrow{V^0(Q)}\right].\vec{n}.$$